

Câu 1: Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$;

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases}$;

c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$;

d) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$.

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (D): $y = x + 4$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính.

Câu 3: Thu gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy} \right)$$

Câu 4: Cho phương trình $x^2 - (5m - 1)x + 6m^2 - 2m = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m;

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Câu 5: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, bán kính R. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng AEHF và AEDB là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh tam giác ABD và tam giác AKC

đồng dạng với nhau. Suy ra $AB.AC = 2R.AD$ và $S = \frac{AB.BC.CA}{4R}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh EFDM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

d) Chứng minh rằng OC vuông góc với DE và $(DE + EF + FD).R = 2S$.

BÀI GIẢI GỢI Ý

Câu 1:

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$

Ta có $\Delta' = b^2 - ac = 1 - 8(-1) = 9 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \frac{1-3}{8} = -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1+3}{8} = \frac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 6 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 18 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5.2 - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hay $t = 3$ (nhận).

Thay vào cách đặt ta được $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = \pm\sqrt{3}$.

d) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = 0$ nên phương trình có nghiệm kép là $x = -\frac{b'}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (D): $y = x + 4$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

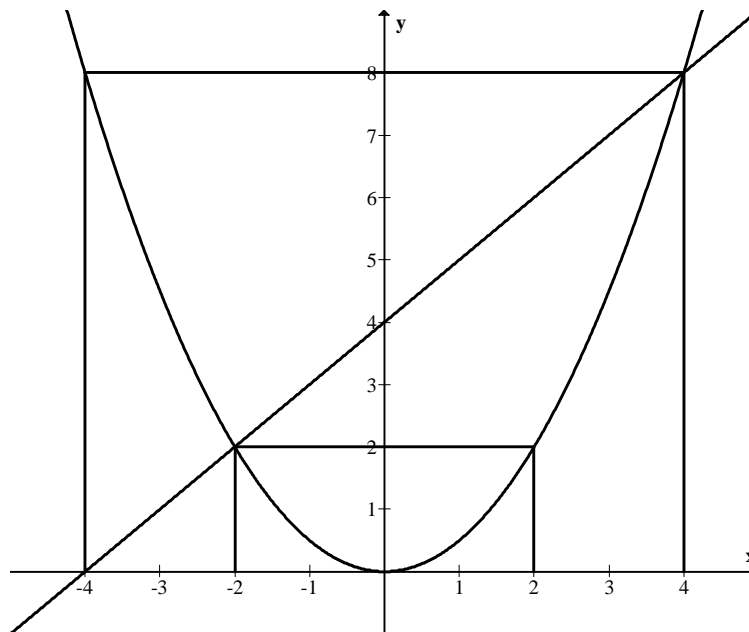
➤ Bảng giá trị của $y = \frac{x^2}{2}$:

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

➤ Bảng giá trị của $y = x + 4$:

x	-2	0
y	2	4

➤ Đồ thị của (P) và (D):



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P):

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hay } x = 4$$

* $x = -2 \Rightarrow y = 2$

* $x = 4 \Rightarrow y = 8$

Vậy (D) cắt (P) tại hai điểm: $(-2; 2); (4; 8)$.

Câu 3: Thu gọn biểu thức sau:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} - \frac{8(\sqrt{5}-1)}{4} + \frac{15\sqrt{5}}{5} \\ &= 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 2 + 3\sqrt{5} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy} \right) \\
&= \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{1 - xy} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} \right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \right) \cdot \left(\frac{1 - xy}{x + xy} \right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy} \right) \cdot \left(\frac{1 - xy}{x + xy} \right) = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{x(1 + y)} = \frac{2}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Câu 4: Cho phương trình $x^2 - (5m - 1)x + 6m^2 - 2m = 0$ (m là tham số)

a) Ta có $\Delta = (5m - 1)^2 - 4(6m^2 - 2m) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0$ với mọi m .
Suy ra phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình.

$$\text{Ta có } x_1 = \frac{5m - 1 + m - 1}{2} = 3m - 1 \text{ và } x_2 = \frac{5m - 1 - m + 1}{2} = 2m.$$

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (3m - 1)^2 + 4m^2 = 1 \Leftrightarrow 13m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = \frac{6}{13}.$$

$$\text{Vậy } m \text{ thoả bài toán } \Leftrightarrow m = 0 \text{ hay } m = \frac{6}{13}.$$

Câu 5:

a) \triangleright Ta có $\angle AEH + \angle AFH = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn.

\triangleright Ta có $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$

\Rightarrow Tứ giác AEDB nội tiếp đường tròn.

b) Ta có $\triangle ADB$ và $\triangle ACK$ có:

* $\angle ABD = \angle ACK$ (cùng chắn cung AC)

* $\angle ADB = \angle ACK = 90^\circ$.

Vậy tam giác ABD và tam giác ACK đồng dạng với nhau.

$$\text{Suy ra: } \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = AK \cdot AD = 2R \cdot AD.$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{2R} \text{ nên } S = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}.$$

c) Gọi M là trung điểm của BC.

$\triangleright \angle BFH + \angle BDH = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp $\Rightarrow \angle FDB = \angle FHB$

mà $\angle FHB = \angle FAE$ (do AEHF nội tiếp). Suy ra $\angle FDB = \angle FAE$ (1)

\triangleright Tam giác BEC vuông tại E $\Rightarrow \triangle MEB$ cân tại M $\Rightarrow \angle MEB = \angle MBE$

mà $\angle MBE = \angle DAE$ (do AEDB nội tiếp). Suy ra $\angle MEB = \angle DAE$.

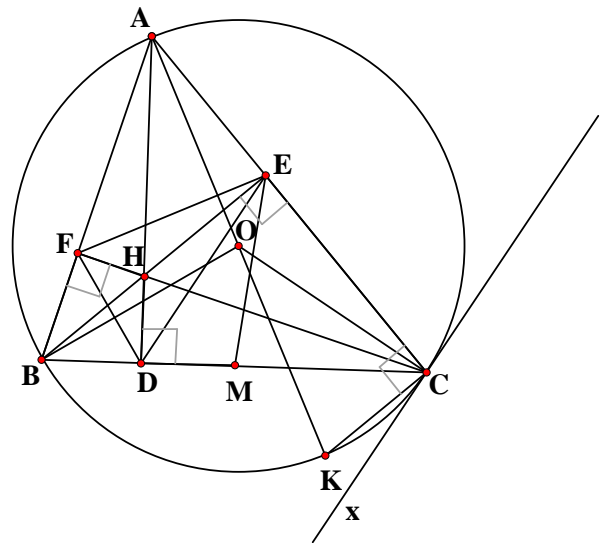
$\angle FEH = \angle FAH$ (do AEHF nội tiếp) $\Rightarrow \angle MEF = \angle MEB + \angle FEH = \angle DAE + \angle FAH = \angle FAE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle FDB = \angle MEF \Rightarrow$ EFDM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

d) \triangleright Vẽ tia tiếp tuyến Cx của (O). Ta có:

$$\angle xCB = \angle BAC \text{ (cùng chắn cung BC)}$$

$$\angle BAC = \angle EDC \text{ (AEDB nội tiếp)}$$



Suy ra $\widehat{C}_x = \widehat{E}_D \Rightarrow C_x \parallel DE$ (hai góc so le trong bằng nhau)

Mà $OC \perp C_x$ nên $OC \perp ED$.

➤ Chứng minh tương tự ta có $OA \perp EF$, $OB \perp FD$.

Vì ΔABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC .

$$\text{Do đó: } S = S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BFOD} + S_{CEOD} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FD + \frac{1}{2}OC.DE$$

$$\Rightarrow 2S = R(EF + FD + DE).$$

*Người giải đề thi: **Thạc sĩ NGUYỄN DUY HIẾU***
*(**Tổ trưởng tổ Toán, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong TP.HCM**)*